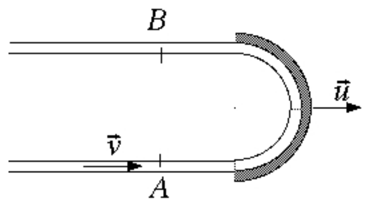
Turbine Pelton.

On modélise le mouvement rotatif d'une turbine en régime permanent par un mouvement rectiligne à la vitesse $\overrightarrow{u} = u\,\overrightarrow{e_x}$. Un godet semi-cylindrique de la turbine reçoit un jet d'eau (masse volumique μ) en contact avec l'air ambiant, de section S, de vitesse $\overrightarrow{v} = v\,\overrightarrow{e_x}$ et de débit massique $D = \mu\,S\,v$ et l'on a, bien sûr, $v > u$ sinon l'eau ne rattraperait pas le godet !



Question 1 :
Le régime est-il permanent ? Par quel artifice peut-on s'y ramener ? Que deviennent vitesse et débit ?

Le régime n'est pas permanent puisque le godet bouge ! En contrepartie naturelle, dans le référentiel lié au godet, il l'est. Dans ce référentiel, le godet est immobile et l'eau arrive à la vitesse relative $\overrightarrow{v}' = v'\,\overrightarrow{e_x}$ avec $v' = v - u$. Attention au débit massique : il est logique de le calculer à travers une section du jet qui soit fixe dans ce nouveau référentiel, il se calcule donc avec la vitesse relative et vaut $D' = \mu\,S\,v' = \mu\,S\,(v - u)$

Question 2 :
On néglige la dénivelée verticale du jet ; trouver la vitesse à laquelle ressort l'eau dans le référentiel du godet et dans celui du sol ?

L'eau est un fluide incompressible et non visqueux, l'écoulement est permanent dans le référentiel du godet. On peut donc y appliquer le théorème de Bernoulli à une ligne de courant et entre deux points A sur la portion du jet avant qu'il ne frappe le godet et B sur la portion qui en ressort vers l'arrière. On a donc

$$\frac{{v'_A}^2}{2} + \frac{p_A}{\mu} + g\,z_A = \frac{{v'_B}^2}{2} + \frac{p_B}{\mu} + g\,z_B$$

Or $p_A = p_B = p_{atm}$, $v'_A = v' = v - u$ et l'on néglige $g\,(z_B - z_A)$ devant $v'^2/2$, donc ${v'_B}^2 = v'^2$ et, puisque le jet sortant par vers l'arrière $v'_B = -v' = -(v - u)$. On retrouve la vitesse absolue qu'on appelera vitesse de sortie v_s en ajoutant la vitesse d'entraînement u, donc $v_s = u - (v - u) = -(v - 2\,u)$

Notons en outre que la conservation du débit dans le référentiel où le régime est permanent entraîne $\mu\,S_A\,v'_A = \mu\,S_B\,|v'_B|$ d'où l'on tire aisément que $S_B = S_A$: le jet a la même section avant et après sa douloureuse rencontre avec le godet.

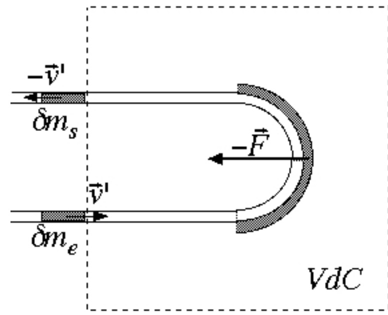
Question 3 :
Quelle force exerce l'eau sur le godet ? Quelle en est la puissance dans le référentiel du sol ?

Remarquons que si le godet a une vitesse constante, c'est que le bilan des forces qui s'y appliquent est nul. Donc la force $\overrightarrow{F}$ que l'eau exerce sur le godet est l'opposé de la force exercée par le reste du moteur sur le godet, donc égale à la force transmise par le godet au moteur. Quoi que. . .

Nous oublions les forces de pression dues à l'air. On s'arrangera pour définir un système baigné de toute part par la pression atmosphérique de façon que le bilan des forces de pression soit la poussée d'Archimède de l'air qui sera négligeable. Ainsi l'affirmation précédente sera valable.

Considérons un volume de contrôle, fixe dans le référentiel du godet pour avoir un régime permanent, volume contenant le godet, une partie du jet entrant et une partie du jet sortant. Considérons le système formé à l'instant t du volume de contrôle et de la masse $\delta m_e = D'\,\mathrm{d}t$ qui va y entrer entre t et $t + \mathrm{d}t$

et donc constitué à $t + \mathrm{d}t$ du volume de contrôle et de $\delta m_s = D' \, \mathrm{d}t = \delta m_e$ qui en est sorti. Appliquons à ce système un bilan de quantité de mouvement.



Notons $\overrightarrow{P}^*$ la quantité de mouvement indépendante du temps du volume de contrôle. A l'instant $t + \mathrm{d}t$ la quantité de mouvement du système est

$$\overrightarrow{P}(t + \mathrm{d}t) = \overrightarrow{P}^* + \delta m_s \, \overrightarrow{v'_s} = \overrightarrow{P}^* - D' \, \mathrm{d}t \, v' \, \overrightarrow{e_x}$$

de même

$$\overrightarrow{P}(t) = \overrightarrow{P}^* + \delta m_e \, \overrightarrow{v'_e} = \overrightarrow{P}^* + D' \, \mathrm{d}t \, v' \, \overrightarrow{e_x}$$

d'où

$$\overrightarrow{P}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{P}(t) = -2 \, D' \, \mathrm{d}t \, v' \, \overrightarrow{e_x}$$

et

$$\overrightarrow{F}_{tot} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\overrightarrow{P}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{P}(t)}{\mathrm{d}t} = -2 \, D' \, v' \, \overrightarrow{e_x}$$

soit en reportant les valeurs obtenues plus haut

$$\overrightarrow{F}_{tot} = -2 \, \mu \, S \, v'^2 \, \overrightarrow{e_x} = -2 \, \mu \, S \, (v - u)^2 \, \overrightarrow{e_x}$$

Cette force est due d'une part aux forces de pression dont le bilan est négligeable, d'autre part à la réaction $-\overrightarrow{F}$ de la force transmise au moteur, et c'est cette force que l'on cherche (cf supra). Rappelons que cette force a la même valeur dans tout référentiel galiléen, celui du godet et celui de l'usine (tout simplement parce que les vitesses absolue et relative diffèrent d'une constante, donc les accélérations sont égales, donc les forces, par application du principe fondamental). La puissance est obtenue par multiplication par la vitesse du point d'application, donc du godet, c'est-à-dire $u \, \overrightarrow{e_x}$. On a donc

$$\overrightarrow{F} = 2 \, \mu \, S \, (v - u)^2 \, \overrightarrow{e_x}$$

$$\mathcal{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u} = 2 \, \mu \, S \, (v - u)^2 \, u \, \overrightarrow{e_x}$$

Question 4 :

Calculer le débit d'énergie cinétique du jet qui arrive sur le godet et de celui qui en ressort. Montrer que le bilan est incomplet et trouver où est passée la puissance manquante.

On va effectuer le bilan énergétique dans un même référentiel, celui de l'usine. Dans un volume de contrôle du même acabit que celui qui précède mais fixe par rapport à l'usine, le jet incident apporte un débit d'énergie cinétique (ou puissance cinétique) :

$$\mathcal{P}_e = \frac{\delta \mathcal{E}_{cin}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \, \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t} \, v^2 = \frac{1}{2} \, D \, v^2 = \frac{1}{2} \, \mu \, S \, v^3$$

Le même raisonnement conduit à une puissance cinétique sortante

$$\mathcal{P}_s = \frac{1}{2}\,\mu\,S\,|v_s|^3 = \frac{1}{2}\,\mu\,S\,(v - 2\,u)^3$$

On aimerait avoir $\mathcal{P}_e = \mathcal{P} + \mathcal{P}_s$ mais ce n'est pas le cas ; c'est plus visible en montrant que

$$1 \neq \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_e} + \frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_e}$$

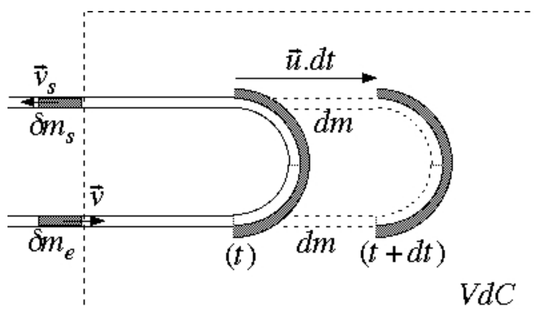
soit

$$1 \neq \frac{(v - 2\,u)^3}{v^3} + 4\,\frac{(v - u)^2\,u}{v^3}$$

ou encore avec $x = u/v$

$$1 \neq (1 - 2\,x)^3 + 4\,(1 - x)^2\,x = 1 - 2\,x + 4\,x^2 - 4\,x^3$$

qui est une inégalité flagrante.



Si le bilan n'est pas équilibré, c'est que le volume de contrôle dans le référentiel de l'usine n'est pas en régime permanent : pendant un intervalle de temps dt, le godet se déplace de d$\ell = u\,$dt et les portions de jet entrant et sortant dans ce volume s'allongent d'autant, ce qui correspond pour chacun d'entre eux à une augmentation de volume d$V = S\,$dℓ et de masse d$m = \mu\,$d$V = \mu\,S\,u\,$dt. Il en résulte pour les deux jets une variation d'énergie cinétique totale :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_{cin} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,v^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,v_s^2 = \frac{1}{2}\,\mu\,S\,u\,\mathrm{d}t\,[v^2 + (v - 2\,u)^2]$$

qu'on peut réécrire

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{cin}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_e\,\frac{u\,[v^2 + (v - 2\,u)^2]}{v^3} = \mathcal{P}_e\,x\,[1 + (1 - 2\,x)^2] = \mathcal{P}_e\,(2\,x - 4\,x^2 + 4\,x^3)$$

qui est exactement ce qui manquait plus haut.

Question 5 :

Montrer que lorsqu'un godet cesse dêtre alimenté et se fait remplacer par le suivant, cette dernière puissance est alors récupérée. Définir et calculer un rendement en fonction du rapport $x = u/v$. Calculer le rendement maximum. Le résultat était-il prévisible ?

Lorsque le godet «n» a suffisamment avancé, le godet «$n+1$» s'intercale ; la portion de jet entrant comprise entre ces deux godets n'est plus alimentée mais continue sur sa lancée et, pendant un certain temps, deux godets exercent une même force sur le moteur : l'énergie qui s'est accumulée dans le volume de contrôle se trouve transformée en puissance mécanique. Par ce mécanisme, le volume de contrôle est en régime périodique et sur une période ou sur une grande durée, la puissance moyenne transmise au moteur est la différence $\langle \mathcal{P} \rangle = \mathcal{P}_e - \mathcal{P}_s$

Le rendement est alors :

$$\rho = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{\mathcal{P}_e} = 1 - \frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_e} = 1 - (1 - 2\,x)^3$$

Si l'on ouvre les yeux au lieu de calculer, le rendement vaut 1 et est donc physiquement maximal pour $x = 1/2$, ce qui est parfaitement naturel car alors $v_s = 0$ et le jet sortant a une énergie cinétique nulle.